Alumno______________________________ nº matrícula:

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

Ejercicio nº 1.- Dada una superficie de revolución, S, parametrizada en la forma $\{x = u\cos v,\ y = u\,\mathrm{sen}\,v,\ z = \mathrm{f}(u);\ u > 0,\ 0 \le v < 2\pi\}$, se pide:

1) Calcular los coeficientes de su Primera y Segunda Formas Fundamentales. [2 puntos]

2) Expresar el área de la superficie comprendida entre los valores de u en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, mediante una integral simple de Riemann en términos de la función f. [2 puntos]

3) Discutir la existencia de puntos de S con *dos direcciones asintóticas*, en términos de la función f. Escribir en dichos puntos la ecuación diferencial de las *líneas asintóticas* de S. [3 puntos]

4) Obtener la ecuación diferencial que debe satisfacer la función f para que las líneas asintóticas de S sean ortogonales. [3 puntos]

Solución (ver Práctica 3, ejercicio nº 27):

●1) Se tiene: a) $\underline{r}(u,v) = u\cos v\,\underline{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\,\underline{j} + \mathrm{f}(u)\underline{k} \Rightarrow \{\underline{g}_u = \cos v\,\underline{i} + \mathrm{sen}\,v\,\underline{j} + \mathrm{f}'(u)\underline{k};\ \underline{g}_v = -u\,\mathrm{sen}\,v\,\underline{i} + u\cos v\,\underline{j}\} \Rightarrow$

$$E = \mathrm{g}_{11} = \underline{g}_u\cdot\underline{g}_u = 1 + [\mathrm{f}'(u)]^2\ ;\ F = \mathrm{g}_{12} = \mathrm{g}_{21} = \underline{g}_u\cdot\underline{g}_v = 0\ ;\ G = \mathrm{g}_{22} = \underline{g}_v\cdot\underline{g}_v = u^2\ ;\ \boxed{\mathbf{G}(u,v) = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{f}'(u)^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}}$$

Para posteriores cálculos: $\underline{g}_u \times \underline{g}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \mathrm{sen}\,v & \mathrm{f}'(u) \\ -u\,\mathrm{sen}\,v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -\mathrm{f}'(u)u\cos v\,\underline{i} - \mathrm{f}'(u)u\,\mathrm{sen}\,v\,\underline{j} + u\,\underline{k} \Rightarrow$

$$|\underline{g}_u \times \underline{g}_v|^2 = u^2[1 + \mathrm{f}'(u)^2] \Rightarrow \underline{N}(u,v) = \frac{-\mathrm{f}'(u)\cos v\,\underline{i} - \mathrm{f}'(u)\,\mathrm{sen}\,v\,\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{1+\mathrm{f}'(u)^2}}$$

b) $$\frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u} = \mathrm{f}''(u)\underline{k}\ ;\ \frac{\partial \underline{g}_u}{\partial v} = \frac{\partial \underline{g}_v}{\partial u} = -\mathrm{sen}\,v\,\underline{i} + \cos v\,\underline{j}\ ;\ \frac{\partial \underline{g}_v}{\partial v} = -u\cos v\,\underline{i} - u\,\mathrm{sen}\,v\,\underline{j}$$

$$e = \mathrm{K}_{11} = \underline{N}(u,v)\cdot\frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u} = \frac{\mathrm{f}''(u)}{\sqrt{1+[\mathrm{f}'(u)]^2}}\ ;\ f = \mathrm{K}_{12} = \mathrm{K}_{21} = \underline{N}(u,v)\cdot\frac{\partial \underline{g}_u}{\partial v} = 0;\ g = \mathrm{K}_{22} = \underline{N}(u,v)\cdot\frac{\partial \underline{g}_v}{\partial v} = \frac{u\mathrm{f}'(u)}{\sqrt{1+[\mathrm{f}'(u)]^2}}$$

luego $$\boxed{\left[\mathrm{K}_{\alpha\beta}(u,v)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{f}'(u)^2}}\begin{bmatrix} \mathrm{f}''(u) & 0 \\ 0 & u\mathrm{f}'(u) \end{bmatrix}}$$

●2) $$\mathrm{Area}(S_{[a,b]}) = \iint_{S_{[a,b]}} \left|\underline{g}_u \times \underline{g}_v\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_a^b\int_0^{2\pi} u\sqrt{1+\mathrm{f}'(u)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \boxed{2\pi\int_a^b u\sqrt{1+\mathrm{f}'(u)^2}\,\mathrm{d}u}$$

donde el último paso efectúa la integral respecto de v y la deja como una integral simple de Riemann, según se pide.

●3) Los puntos con dos direcciones asintóticas son los puntos hiperbólicos, por el teorema de Euler sobre la curvatura normal: $\kappa_n(\underline{e}) = \mathrm{k}_1\cos^2\alpha + \mathrm{k}_2\mathrm{sen}^2\alpha$, siendo α el ángulo de $\underline{e}$ con la primera dirección principal de S en el punto. Porque, si $\underline{e}$ es un dirección asintótica de S en un punto P, entonces $\kappa_n(\underline{e}) = 0$ y ello, en un punto hiperbólico ocurre exactamente en dos direcciones tangenciales, tales que $\mathrm{tg}^2(\alpha) = {}^{-\mathrm{k}_1}\!/\!_{\mathrm{k}_2}$: con las curvaturas principales de distinto signo. Pero eso exige que la *IIFF* sea indefinida, o sea, que el punto sea hiperbólico.

Así pues, se están pidiendo los puntos hiperbólicos de $S \Leftrightarrow \det\underline{\mathbf{K}} < 0 \Leftrightarrow \mathrm{f}'(u)\mathrm{f}''(u) < 0 \Leftrightarrow$ f es creciente y cóncava (simultáneamente) o bien f es decreciente y convexa.

Las *líneas asintóticas* tienen curvatura normal nula en todos sus puntos o llevan en todos sus puntos una dirección asintótica de la superficie. Así su e. d. se obtiene al exigir a $\underline{e} = u'(s)\underline{g}_u(s) + v'(s)\underline{g}_v(s)$ que verifique

$\underline{e}\cdot\underline{\mathbf{K}}\cdot\underline{e} = 0 \Leftrightarrow$ $$\boxed{\mathrm{f}''(u(s))u'(s)^2 + u(s)\mathrm{f}'(u(s))v'(s)^2 = 0}$$

es la e. d. pedida. #.

●4) Las direcciones asintóticas en los puntos hiperbólicos forman ángulos $\pm\alpha$ con la dirección principal $\underline{d}_1$, tales que $\mathrm{tg}^2(\alpha) = -\frac{k_1}{k_2} = \frac{-u\mathrm{f}''(u)}{\mathrm{f}'(u)\left(1+\mathrm{f}'(u)^2\right)}$; para que sean ortogonales, basta que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (admitiendo $u = \rho > 0$ y que el punto es hiperbólico) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{f}'(u)\left(1+\mathrm{f}'(u)^2\right)+u\mathrm{f}''(u)=0}$ #.
